Gabriel POPA
Dorel LUCHIAN
Adrian ZANOSCHI
Gheorghe IUREA

matematică

algebră
geometrie

clasa a VIII-a

mate 2000 – standard

ÎNVĂȚARE STANDARD ®
aprofundare

Editura Paralela 45

CUPRINS

CAPITOLUL I
INTERVALE DE NUMERE REALE. INECUAȚII ÎN $\mathbb{R}$

I.1. MULȚIMI DEFINITE CU AJUTORUL UNEI PROPRIETĂȚI COMUNE ELEMENTELOR LOR

Dacă, pentru o mulțime M, putem identifica o anumită proprietate p pe care toate elementele mulțimii o verifică și niciun element care nu aparține mulțimii nu o verifică (numită proprietate caracteristică a mulțimii M), vom nota mulțimea M astfel:

$$M = \{x \mid x \text{ are proprietatea } p\}.$$

Citim: „M este mulțimea acelor x care au proprietatea p”.

PROBLEME REZOLVATE

1. Scrieți, prin enumerarea elementelor, următoarele mulțimi:

$A = \{x \mid x$ este vocală în cuvântul *paralelipiped*$\}$; $B = \{a \mid a$ este cifră, $\overline{12a} \vdots 3\}$;

$C = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid -2 < x \leq 3\}$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \cdot y = -5\}$.

Soluție: $A = \{a, e, i\}$; $B = \{0, 3, 6, 9\}$; $C = \{-1, 1, 2, 3\}$; $D = \{(-5, 1); (-1, 5); (1, -5); (5, -1)\}$.

2. Fie mulțimea $A = \{8, 12, 20, 27, 30, 45, 106\}$. Determinați mulțimile:

$$B = \{x \in A \mid x \vdots 4\}; C = \{x \in A \mid x \vdots 9\}; D = \{x \in A \mid x \vdots 2 \text{ și } x \not\vdots\ 4\}.$$

Soluție: $B = \{8, 12, 20\}$; $C = \{27, 45\}$; $D = \{30, 106\}$.

3. Considerăm, în plan, un sistem ortogonal de axe xOy și notăm cu (x_P, y_P) coordonatele unui punct P. Reprezentați geometric mulțimile:

a) $A = \{P \mid x_P = 0\}$; b) $B = \{P \mid y_P = 1\}$; c) $C = \{P \mid x_P < 0\}$.

Soluție: a) Elementele mulțimii A sunt acele puncte care au abscisa egală cu 0, adică toate punctele axei Oy (figura 1).

b) Elementele mulțimii B sunt acele puncte care au ordonata egală cu 1, adică punctele unei drepte paralele cu axa Ox, care conține punctul $M(0, 1)$ (figura 2).

c) Elementele mulțimii C sunt acele puncte care au abscisa negativă și ordonata neprecizată, adică toate punctele semiplanului deschis cu frontiera Oy, situat în stânga axei Oy (figura 3).

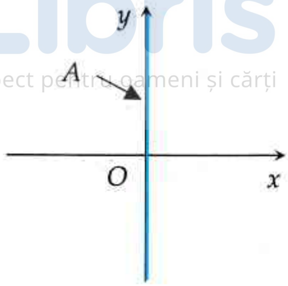


Figura 1

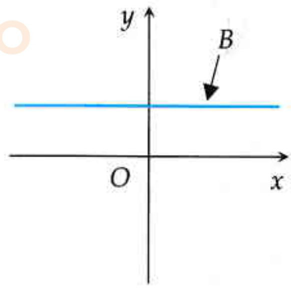


Figura 2

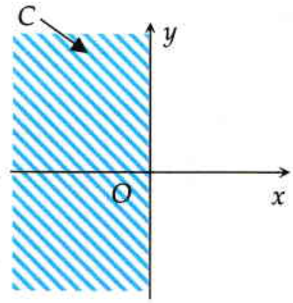


Figura 3

4. Fie mulţimile $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 3k + 2, k \in \mathbb{Z}\}$ şi $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 32 - 3p, p \in \mathbb{Z}\}$. Arătaţi că $A = B$.

Soluţie: Vom demonstra că $A \subset B$ şi $B \subset A$. Fie $x \in A$, adică $x = 3k + 2$, $k \in \mathbb{Z}$. Atunci $x = 32 + 3k - 30 = 32 - 3(10 - k)$. Notând $10 - k = p \in \mathbb{Z}$, obţinem că $x = 32 - 3p$, deci $x \in B$ şi deducem că $A \subset B$. Reciproc: Dacă $x \in B$, rezultă că $x = 32 - 3p = 3(10 - p) + 2 = 3k + 2$, unde $k = 10 - p \in \mathbb{Z}$. Astfel, $x \in A$ şi am arătat că $B \subset A$, ceea ce încheie demonstraţia.

PROBLEME PROPUSE

1. Scrieţi, prin enumerarea elementelor, următoarele mulţimi:
$A = \{x \mid x$ este vocală în cuvântul *mulţime*$\}$; $B = \{x \mid x$ este cifră impară$\}$;
$C = \{x \mid x$ este cifră a bazei $2\}$; $D = \{x \mid x$ este număr prim de o cifră$\}$.

2. Determinaţi elementele următoarelor mulţimi:
a) $A = \{x \mid \overline{2x5} \vdots 3\}$; b) $B = \{x \mid \overline{x32} \vdots 2\}$;
c) $C = \{x \mid \overline{xx72} \vdots 9\}$; d) $D = \{x \mid \overline{12x} \vdots 4\}$.

3. Fie mulţimile $A = \{-2, 1, 7\}$ şi $B = \{0, 1\}$. Determinaţi elementele următoarelor mulţimi:
a) $A \cup B = \{x \mid x \in A$ sau $x \in B\}$; b) $A \cap B = \{x \mid x \in A$ şi $x \in B\}$;
c) $A \setminus B = \{x \mid x \in A$ şi $x \notin B\}$; d) $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A$ şi $y \in B\}$.

4. Determinaţi elementele următoarelor mulţimi:
a) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}^*, 2^x < 15\}$; b) $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x \mid 2\}$;
c) $C = \{x \mid x \in \mathbb{Z}^*, |x| < 2\}$; d) $D = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 1 < x - 1 \leq 3\}$.

5. Scrieţi cu ajutorul unei proprietăţi caracteristice următoarele mulţimi:
a) $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$; b) $B = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$;
c) $C = \{1, 2, 4, 8\}$; d) $D = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}\right\}$.

6. Se consideră mulţimile $A = \{x \mid x = 4k + 2, k \in \mathbb{Z}\}$ şi $B = \{x \mid x = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$.

a) Scrieţi câte trei elemente din fiecare mulţime.

b) Stabiliţi dacă numerele 200, 201 şi 202 aparţin celor două mulţimi.

c) Arătaţi că $A \subset B$ şi $B \not\subset A$.

7. Se consideră mulţimile $A = \{x \mid x = 3k, k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \mid x = 3k + 1, k \in \mathbb{N}\}$, $C = \{x \mid x = 3k + 2, k \in \mathbb{N}\}$.

a) Stabiliţi dacă numerele 2018, 2019 şi 2020 aparţin celor trei mulţimi.

b) Determinaţi $A \cap B$.

c) Determinaţi $A \cup B \cup C$.

8. Determinaţi elementele următoarelor mulţimi:

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 2x + y = 7\}$; b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \cdot y = 2\}$;

c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 3x + y = 1 \text{ şi } x - 2y = 5\}$.

9. Determinaţi cardinalul fiecăreia dintre următoarele mulţimi:

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 10\}$; b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 25\}$;

c) $C = \{\overline{abc} \mid a + c = 2\}$; d) $D = \{\overline{xy} \mid x > y\}$.

10. Se consideră mulţimea $M = \left\{0; -\frac{6}{2}; -\sqrt{2\frac{1}{4}}; \pi; 3\sqrt{2}; 0,(2)\right\}$. Determinaţi mulţimile:

a) $A = \{x \in M \mid x \geq 0\}$; b) $B = \{x \in M \mid x \notin \mathbb{Q}\}$;

c) $C = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Z}\}$; d) $D = \{x \in M \mid x \geq y, \forall\, y \in M\}$.

11. Determinaţi elementele următoarelor mulţimi:

a) $A = \left\{x \in \mathbb{N} \,\middle|\, \frac{4}{x} \in \mathbb{N}\right\}$; b) $B = \left\{x \in \mathbb{N} \,\middle|\, \frac{3}{x-1} \in \mathbb{Z}\right\}$;

c) $C = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{9}{2x+1} \in \mathbb{Z}\right\}$; d) $D = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{2x-3}{x+1} \in \mathbb{Z}\right\}$.

12. Fie mulţimea $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 < x \leq 9\}$. Determinaţi elementele mulţimilor A, B, C şi D, unde: $A = \{x \in M \mid |x| = x\}$, $B = \{x \in M \mid |x| = -x\}$, $C = \{x \in M \mid |x| \leq 2\}$, $D = \{x \in M \mid |x| \geq 4\}$.

13. Fie mulţimile $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$ şi $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 201 - 2p, p \in \mathbb{Z}\}$. Arătaţi că $A = B$.

14. Dacă M este un punct în planul triunghiului ABC, determinaţi următoarele mulţimi:

a) $P = \{M \mid M \in BC, BM = MC\}$; b) $Q = \{M \mid MA = MB = MC\}$;

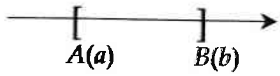
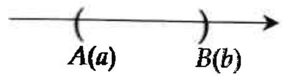
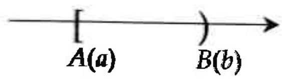
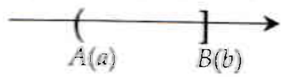
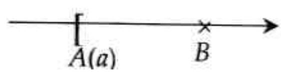
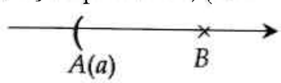
c) $R = \{M \mid MA = MB\}$; d) $S = \{M \mid d(M, AB) = d(M, BC) = d(M, AC)\}$.

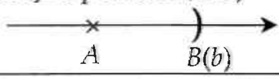
15. Reprezentaţi, în raport cu un reper cartezian xOy, următoarele mulţimi de puncte din plan:

a) $B_1 = \{M \mid x_M = y_M\}$; b) $B_1 = \{M \mid x_M = -y_M\}$; c) $C = \{M \mid x_M = y_M; -1 \leq x_M \leq 1\}$.

I.2. Intervale

Un **interval** este o submulțime a mulțimii numerelor reale care, odată cu două valori reale a și b, conține toate numerele reale cuprinse între a și b.

Definiție și notație	Reprezentare geometrică	Caracterizare
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$	Segmentul închis $[AB]$ 	Intervalul închis, mărginit, având capetele a și b. Există un cel mai mic și un cel mai mare element în acest interval.
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	Segmentul deschis (AB) 	Intervalul deschis, mărginit, având capetele a și b. Nu există un cel mai mic și un cel mai mare element în acest interval.
$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$	Segmentul semiînchis $[AB)$ 	Intervalul mărginit, închis la stânga, deschis la dreapta, având capetele a și b. Există un cel mai mic element, dar nu există un cel mai mare element în acest interval.
$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$	Segmentul semiînchis $(AB]$ 	Intervalul mărginit, deschis la stânga, închis la dreapta, având capetele a și b. Există un cel mai mare element, dar nu există un cel mai mic element în acest interval.
$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge a\}$	Semidreapta închisă cu originea în punctul A, care conține punctul B, $[AB$ 	Interval mărginit la stânga și nemărginit la dreapta, având capătul din stânga a. Există un cel mai mic element, dar nu există un cel mai mare element în acest interval.
$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	Semidreapta deschisă cu originea în punctul A, care conține punctul B, $(AB$ 	Interval mărginit la stânga și nemărginit la dreapta, având capătul din stânga a. Nu există un cel mai mic și un cel mai mare element în acest interval.
$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}$	Semidreapta închisă cu originea în punctul B, care conține punctul A, $AB]$ 	Interval mărginit la dreapta și nemărginit la stânga, având capătul din dreapta b. Există un cel mai mare element, dar nu există un cel mai mic element în acest interval.

$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	Semidreapta deschisă cu originea în punctul B, care conține punctul B, $AB)$ 	Interval mărginit la dreapta și nemărginit la stânga, având capătul din dreapta b. Nu există un cel mai mare și un cel mai mic element în acest interval.
$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$	Axa numerelor, numită și dreapta reală 	Interval nemărginit la ambele capete. Nu există un cel mai mare și un cel mai mic element în mulțimea $\mathbb{R}$.

Operațiile cu intervale sunt operații uzuale cu mulțimi:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\} \text{ – reuniunea;}$$
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\} \text{ – intersecția;}$$
$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\} \text{ – diferența.}$$

Este indicat să se utilizeze reprezentarea geometrică atunci când se efectuează operații cu intervale.

PROBLEME REZOLVATE

1. Pe o cutie de lapte este menționat conținutul: 1000 ml ± 3%. Exprimați, cu ajutorul intervalelor, între ce valori se situează volumul de lapte din cutie.

Soluție: Deoarece $\frac{3}{100} \cdot 1000 = 30$ ml, volumul de lapte din cutie se situează în intervalul [970 ml, 1030 ml].

2. Scrieți sub formă de interval mulțimile:

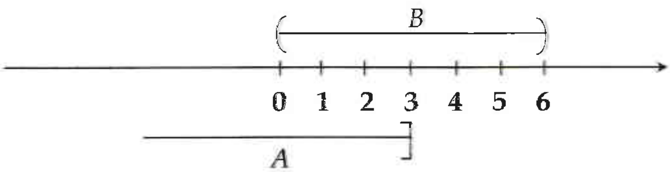
$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \le 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 1 \ge 9\}$,

$C = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 3 \le 11\}$, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 4| < 6\}$.

Soluție: $A = (-2, 5]$. Dacă $x - 1 \ge 9$, rezultă că $x \ge 10$, iar $B = [10, \infty)$. Dacă $2x - 3 \le 11$, rezultă că $x \le 7$, iar $C = (-\infty, 7]$. Utilizând proprietățile modulului, avem că $-6 < x - 4 < 6$, deci $D = (-2, 10)$.

3. Determinați $A \cup B$ și $A \cap B$, dacă $A = (-\infty, 3]$, iar $B = (0, 6)$.

Soluție: Ținând cont de definițiile operațiilor cu mulțimi și de reprezentarea geometrică a celor două mulțimi obținem că $A \cup B = (-\infty, 6)$ și $A \cap B = (0, 3]$.



PROBLEME PROPUSE

1. Stabiliți valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele propoziții:

p_1: $\{x \in \mathbb{R} \mid -7 < x \leq 9\} = [-7, 9]$;

p_2: $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 0\} \neq [-3, 0)$;

p_3: $\left\{x \in \mathbb{Q} \middle| -\frac{5}{2} < x < \frac{7}{3}\right\} = \left(-\frac{5}{2}, \frac{7}{3}\right)$;

p_4: $\{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 6\} = [1, 6]$.

2. Reprezentați pe axa reală următoarele intervale:

a) $I_1 = [-4, 2]$; b) $I_2 = \left(1, \frac{5}{2}\right)$; c) $I_3 = (-\infty, 6]$; d) $I_4 = \left(-\sqrt{3}, \infty\right)$.

3. Scrieți ca intervale mulțimile care au următoarele reprezentări geometrice:

a) segmentul închis AB, unde $A(-3)$ și $B(7)$;

b) segmentul deschis MN, unde $M(-1)$ și $N\left(\sqrt{2}\right)$;

c) semidreapta închisă AO, unde $A(3)$ și $O(0)$;

d) semidreapta deschisă BO, unde $B(-1)$ și $O(0)$.

4. Scrieți ca intervale următoarele mulțimi:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x$ este cuprins între 7 și 9$\}$;

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x$ este mai mic decât 0$\}$;

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x$ este mai mare sau egal cu $-2\}$;

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x$ nu este mai mic decât 2 și nici mai mare decât 7$\}$.

5. Scrieți ca intervale următoarele mulțimi:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 6\}$; b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 3\}$;

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x + 1 \leq 2\}$; d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < 2x < 10\}$.

6. Scrieți ca intervale următoarele mulțimi:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\}$; b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$;

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x \leq 10\}$; d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 7 > -2\}$.

7. Scrieți ca intervale următoarele mulțimi:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x - 1 < 1\}$; b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq 3x \leq 9\}$;

c) $C = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| -1 < \frac{x}{2} < 3\right\}$; d) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| -5 < \frac{x+1}{3} \leq 10\right\}$.

8. a) Determinați cel mai mare număr natural care aparține intervalului $(-3, 8)$.

b) Determinați cel mai mic număr întreg care aparține intervalului $\left[-\frac{13}{2}, \frac{7}{5}\right)$.

c) Determinați cel mai mare număr întreg negativ care nu aparține intervalului $\left(-\sqrt{13}, 2\right]$.

d) Determinați cel mai mic număr natural care nu aparține intervalului $\left[-\frac{2}{3}, \frac{11}{4}\right]$.

9. a) Dați un exemplu de interval care conține numărul $\sqrt{2}$.
b) Dați un exemplu de interval care nu conține numere întregi.
c) Dați un exemplu de interval care conține exact două numere întregi negative.

10. Stabiliți valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele propoziții:

a) $2 \in (-\infty, 3)$; b) $3 \notin (-\infty, 3)$; c) $-\frac{2}{9} \in (-\infty, -1)$;

d) $1{,}41 \in \left[1, \sqrt{2}\right]$; e) $(3, 4) \subset (3, 4]$; f) $\mathbb{N} \subset (0, \infty)$.

11. Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției „$x \in I$”, în fiecare dintre cazurile:

a) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $I = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$; b) $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$; $I = \left(2, \sqrt{5}\right)$;

c) $x = \frac{a+b}{2}$; $I = (a, b)$, unde $0 < a < b$; d) $x = \sqrt{ab}$; $I = (a, b)$, unde $0 < a < b$.

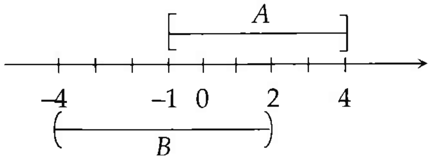
12. Determinați numerele naturale a pentru care $\frac{5a-1}{3} \in \left(1, \frac{3a+1}{2}\right)$.

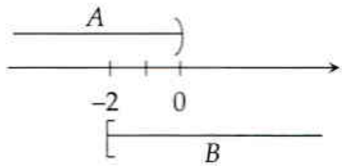
13. Scrieți ca intervale următoarele mulțimi:
a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| = x\}$; b) $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, |x+1| = x+1\}$;
c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| = -x\}$; d) $D = \{x \mid x \in \mathbb{R}, |x-1| = 1-x\}$.

14. Scrieți ca intervale următoarele mulțimi:
a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \le 5\}$; b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| + 1 \le 3\}$;
c) $C = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \left[\frac{x}{2}\right] = 1\right\}$ ($[a]$ reprezintă cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu a).

15. Scrieți cu ajutorul intervalelor următoarele mulțimi:
a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \ge 5\}$; b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| + 1 \ge 3\}$.

16. Transcrieți pe caiet figurile de mai jos și identificați mulțimile A, B, $A \cup B$ și $A \cap B$ în fiecare caz:

a) 

b) 

17. Determinați mulțimile:
a) $(-9, 5) \cap (0, 6)$; b) $[-1, 2] \cap [-7, 1]$; c) $(-10, 2) \cap (3, \infty)$;
d) $\left[-\frac{7}{3}, 4\right] \cap [4, 5]$; e) $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \cap \left[\sqrt{2}, \infty\right)$; f) $\left(-3\sqrt{2}, 5\right) \cap \left(-1, 2\sqrt{6}\right)$.

18. Determinați mulțimile:

a) $(-6, 4) \cup (2, 5)$;
b) $[-9, 0] \cup (0, 10]$;
c) $(-\infty, 3) \cup \left(\frac{8}{3}, \infty\right)$;
d) $\left(-3\sqrt{2}, 5\right) \cup \left(-1, 2\sqrt{6}\right)$.

19. Determinați mulțimile:

a) $(3, 9) \cup \{3\}$;
b) $(-4, 5] \cap \mathbb{N}$;
c) $\left[-\sqrt{13}, \sqrt{5}\right] \cap \mathbb{Z}$;
d) $\mathbb{N} \cup (0, \infty)$.

20. Se consideră mulțimile $A = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -1 \leq \frac{2x+1}{3} \leq 3\right\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-2| \leq 3\}$.

a) Scrieți ca intervale cele două mulțimi.
b) Determinați $A \cup B$ și $A \cap B$.
c) Arătați că numărul $a = \frac{\sqrt{5}+4}{2}$ aparține mulțimii B.

21. Se consideră mulțimile $A = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -2 \leq \frac{x+3}{5} < 1\right\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x-3 \leq 1 \leq x+2\}$.

a) Scrieți ca intervale cele două mulțimi.
b) Determinați $A \cap B$ și $A \setminus B$.

22. Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-2| \leq 50\}$, iar $M = A \cap \mathbb{Z}$. Determinați:

a) mulțimile A și M;
b) cardinalul mulțimii M;
c) suma și produsul elementelor mulțimii M.

23. Se consideră intervalul $A = \left(-\sqrt{3}, \frac{2a-1}{3}\right]$, unde a este un număr întreg.

a) Determinați a pentru care mulțimea $A \cap \mathbb{Z}$ are un singur element.
b) Determinați a pentru care mulțimea $A \cap [3, \infty)$ are un singur element.

24. Determinați cea mai mică valoare întreagă a lui a pentru care:

a) $-\pi \in (-\infty, a]$;
b) $(-\infty, 2a+5) \cap (3a+1, \infty) = \varnothing$.

25. Determinați numerele reale a și b, $a < b$, în fiecare dintre următoarele situații:

a) $(a, b) \cap \mathbb{N} = \{2\}$;
b) $[a, b] \cap \mathbb{Z} = \{-1, 0, 1\}$;
c) $[a, b] \cup (-1, 4) = [-1, 5]$;
d) $[a, b] \cap (1, 4) = [2, 3]$.

26. Arătați că $a = |x+2| + |x-1|$ are valoare constantă, pentru orice $x \in [-2, 1]$.

27. Arătați că $a = \frac{2}{x}\left(\left|x+\sqrt{2}\right| + \left|x-\sqrt{2}\right|\right)$ este număr natural pătrat perfect, pentru orice $x \in \left(\sqrt{2}, \infty\right)$.

28. Dacă $x \in [-1, 2]$ și $y \in [-3, 4]$, arătați că $|x+y-1| \leq 5$.